7.9 **构造如下图灵机**

**H = “对于输入<G>, G是一个无向图,**

**1) 设G有n个顶点, 且顶点为x1, x2,…, xn.**

**2) 若 n < 3, 则拒绝.**

**3) 对 i = 1 到 n-2,**

**4) 对 j = i+1 到 n-1,**

**5) 对 k = j+1 到 n,**

**6) 检查xi, xj, xk,是否是一个三角形(即是否三条边相连)**

**7) 若是, 则接受.**

**8) 拒绝.”**

7.11 **构造如下非确定图灵机**

**N=“对于输入<G,H>, G和H都是图,**

**1) 若G和H顶点数不同, 则拒绝.**

**2) 设G的顶点为x1, x2,…, xn, H的顶点为y1, y2,…, yn.**

**3) 非确定的选择1到n的排列p.**

**4) 对 i = 1 到 n-1**

**5) 对 j = i+1 到 n**

**6) 若 (xi,xj)∈E(G) 异或 (yp(i),yp(j))∈E(H) 为真, 则拒绝**

**7) 接受.”。**

**若G, H同构,则 N一定有分支接受; 否则, N所有分支拒绝.**

**N的所有分支都在都在O(n2)时间内运行.**

**所以, N是ISO的多项式时间非确定判定器, ISO∈NP.**

7.21 **(1) Double-SAT∈NP**

**构造如下非确定图灵机**

**N=“对于输入<φ>, φ是布尔公式,**

**(a) 非确定地产生两组不同赋值s,t**

**(b) 若既有在赋值s下φ=1, 又有在赋值t下φ=1, 则接受；否则，拒绝”**

**因为N的语言是Double-SAT, 且N在多项式时间内运行, 所以Double-SAT∈NP.**

**(2) 证明SAT可以多项式时间映射归约到Double-SAT.**

**对任意布尔公式φ, 添加一个新变量a, 构造函数f(φ) = φ ∧ (a∨¬a)。**

**首先, f可在多项式时间内计算完成。**

**其次, f是SAT到Double-SAT的映射归约, 即φ可满足⇔f(φ)有两个满足赋值:**

**若φ有可满足赋值s, 则在赋值s和a=1下f(φ)=1, 在赋值s和a=0下f(φ)=1, 从而有两个不等赋值; 若f(φ)有可满足赋值s, 则从s中去掉a的赋值, 必然也是φ的可满足赋值. 所以f是从SAT到Double-SAT的多项式时间映射归约。**

**由(1)和(2) 及SAT是NP完全问题知，Double-SAT是NP完全问题。**

7.22 **(1) HALF-CLIQUE∈NP**

**构造如下非确定图灵机**

**N=“对于输入<G>, G是无向图,有m个顶点**

**(a) 非确定地产生一个m/2个顶点的子集**

**(b) 若这个子集中的任意两个顶点之间都有边相连, 则接受; 否则, 拒绝”.**

**因为N的语言是HALF-CLIQUE，且N是在多项式时间运行，所以HALF-CLIQUE∈NP。**

**(2) 证明CLIQUE可以多项式时间映射归约到HALF-CLIQUE.**

**对任意<G,k>，其中G是一个无向图，k是一个正整数。构造函数f(<G,k>) = G’。**

**设G有m个顶点。按如下方式构造G’：**

**若k=m/2，则G=G’；**

**若k>m/2，则在G中增加2k-m个新顶点，这些新顶点都是孤立点，得到G’；**

**若k<m/2，则增加m-2k个新顶点，这些新顶点之间两两都有边相连，新顶点与G的所有顶点之间也都相连。**

**首先，f可在多项式时间内计算完成。**

**其次证明f是CLIQUE到HALF-CLIQUE的映射归约，即证明G有k团⇔G’(设有m’个顶点)有m’/2个顶点的团：**

**若G有k团，当k=m/2时，G’=G, m’=m，则G’也有k=m’/2团；当k>m/2时，m’=2k，G’中也有k=m’/2团；当k<m/2时，m’=2m-2k，G中的k团加上新添的m-2k个顶点形成m-k=m’/2团。**

**若G’有m’/2团，当k=m/2时，G’=G, m’=m，则G也有k=m’/2团；当k>m/2时，m’=2k，G中也有k=m’/2团；当k<m/2时，m’=2m-2k，G’中的m-k团至多有m-2k个新添顶点，去掉新添顶点至少还有k个顶点，所以G中有k团。**

**由(1),(2)和CLIQUE是NP完全问题知，HALF-CLIQUE是NP完全问题。**